

約数からみた自然数の性質の研究

理数科2年 大政 諒輔 赤崎 零生
弓立 大貴
指導教諭 近藤 弘法

1 目的

ある自然数 n の約数の和が $2n$ となるときこの自然数 n を完全数といい、完全数についての研究を行ってきた。その中で完全数と約数には密接な関係があることが分かった。そこで自然数の約数をグラフに現すことで、約数と自然数の関係性、また完全数が持つ性質を発見することはできないかと考えてこの研究を始めた。

2 方法

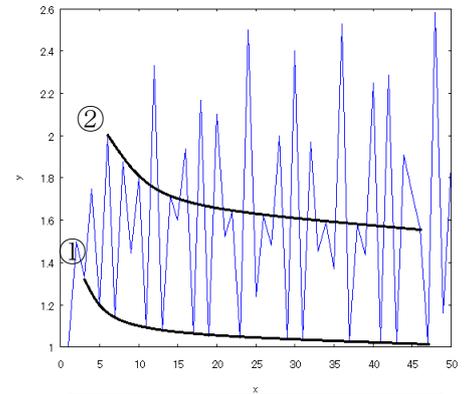
数式処理ソフト「wxMaxima」を用いて、約数に関するグラフを作成し、そこから約数と自然数の関係性や完全数の性質を導き出す。

(1) 約数の和をグラフに現す。

(2) ある数 x の約数の和を元の数 x で割ったものをグラフに現す。

3 結果

方法(2)で作成したグラフは右のようになった。このグラフにおいて x が素数となっているものだけを考えると、グラフ上の曲線①で示したような緩やかなカーブとなった。グラフ上では他の場所でも同じようなカーブが見てとれた。図の中央の曲線②はその中の一つである。



方法(2)で現れたグラフ

4 考察

x が素数となるものの約数は 1 と x の 2 つだけなので約数の和は

$1+x$ となる。これを元の数 x で割ると $\frac{1}{x} + 1$ となり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} + 1) = 1$ より曲線①の値は 1 に近づいていくと考えられる。

曲線②は x が $6, 10, 14, 22$ などを通しており、素数の 2 倍の値を通して

いると考えられる。 x が素数の 2 倍のとき、 x の約数は $1, 2, \frac{x}{2}, x$ となるので曲線①と同様に考

えると、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3}{x} + \frac{3}{2}) = 1.5$ となるので、 1.5 に近づいていくと考えられる。しかし、 $x=4$ のとき、

つまり x が素数 2 の 2 倍の値になっているとき y の値はこの曲線上には現れない。これは $x=2$ のとき、 2 と $\frac{x}{2}$ が一致するからであると考えられる。

5 結論

グラフ上で x の値が $(n$ より大きい素数) $\times n$ の形となっているときの y の値は曲線で結ぶことができ、この曲線は必ずいずれかの値に近づいていくと考えられる。このグラフにおいて $y=2$ となる時の x の値が完全数であるといえるので、これらのことから完全数が現れるのは、曲線の最初の y の値が 2 以上で、かつ 2 以下のいずれかの数に近づいていく曲線のみであると推測できる。また、 x の値が $(n$ 以下の素数) $\times n$ の形となるものについては、 y にどんな数が現れるかということが検証できていないため、今後の課題としたい。また今回の研究から完全数についての性質を見つけることにも挑戦したい。

6 参考文献

「素数入門」 芹沢正三 「素数夜曲」 吉田武 「現代数学序説Ⅲ」 大阪大学出版会