

# トールスパズルの製作と研究 —完成させるための条件とその判別方法—

理数科 2 年 石田 航暉 岡本 晴気  
永井 裕人 松尾 龍冴  
指導教諭 河野 美千代 越智 功真

## Abstract

We created a new type of puzzle called “Torus-puzzle”, which is derived from a 15-puzzle. We have studied this kind of puzzle to reveal whether it’s always possible for the puzzle to be cleared. We succeeded in proving our theory with the idea of “permutation.” As a result, this research shows that it is always possible for the puzzle to be cleared when the number of the pieces of the puzzle is an even number, on the other hand, it isn’t always possible to clear the puzzle when the number is an odd number. (Provided the number of pieces in both the lines and rows are more than 1.)

### 1 目的

以前 15 パズルに興味があり、その仕組みについて考えた。先行研究により、15 パズルは段階的に完成することが可能だと分かった。そこで、段階的に完成することが不可能なパズルを独自に製作し研究することにした。

- (I) 完成することが不可能な配置を明らかにし、ある配置から完成することが可能か不可能かを判別する方法を確立する。
- (II) どのような配置からでも完成することが可能なルールを考察する。

### 2 方法

トールスパズル(図 1)とは、 $m \times n$  ( $m \geq 2, n \geq 2$ )のマスに、 $1 \sim m \times n$ の数字のかかれたピースを敷き詰めたもので、(図 1)のような配置を完成形とする。縦一列か横一列単位でスライドし、はみ出たピースを空いたマスに入れることでパズルを動かしていく。斜めに動かすことはできない。このルールを用いて、ランダムに配置された盤面から完成形を目指す。この縦横の動きはトールス上で可能であるため、このパズルをトールスパズルと名付ける。

- (I) 置換を用いて、一般化する。
- (II) (I)の結果をもとに考察する。

### 3 結果

- (I)  $m$ または $n$ が偶数ならば必ず完成することが可能で、 $m$ と $n$ がともに奇数ならば完成することが不可能な場合がある。

$m$ と $n$ がともに奇数のとき、完成形から奇置換で表せられる並び替えを行った配置は完成することが不可能である。

$m$ と $n$ がともに奇数のとき、完成形までに、2ピースの入れ替えが奇数回必要な場合、完成することが不可能な配置といえる。

- (II) 同じ数字同士の互換は配置を変化させない奇置換であるため、奇数 $\times$ 奇数のトールスパズルでも同じ数字が書かれたピースが2つ以上あれば必ず完成することが可能である。

### 4 考察

$m$ と $n$ がともに奇数かつ奇数回の2ピースの入れ替えを行うと完成することが不可能である。同じ数字が書かれたピースを2つ以上にすれば、この配置でも完成することが可能となる。

### 5 今後の課題

長方形以外の図形や立体に拡張したトールスパズルが完成することが可能か不可能かは、奇置換の操作を行うことができるかどうかで決まるのではないかと。また、トールスパズルの最短手の最大値について、 $2 \times n$ については上界を求めることに成功したので、 $m \times n$ についても拡張したい。

### 6 参考文献

松山南高等学校数学班(2008)「15 パズルの謎」

David Joyner(2010)「群論の味わい 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル」共立出版

1	2		n
n+1	n+2		2n
mn-n +1	mn-n +2		mn

図 1 トールスパズル