タイルの分割

松山南高等学校

日野七海徒　指導教員　福澤純治

研究期間：２０２３年１月～２０２３年７月

タイルの性質についての研究

愛媛県立松山南高等学校　　数学班

日野七海徒　　　指導教諭　福澤純治

１．はじめに

マス目で区切られた様々な図形を、同じ形のタイルで埋め尽くしていくデザインに興味を持ち、当てはまるタイルの数や形の性質を数学的に探究することを目的として本研究を行った。

２．本論文で用いる記号

$\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
$floor(x)$: x 以下の最大の整数
$ceil(x)$: x 以上の最大の整数
G, G'を整数の部分集合、$a, b \in \mathbb{Z}$
$\min G$ ：G の要素のうち最小な値
$\max G$ ：G の要素のうち最大な値
$|G|$ ：G の要素数
$aG + b = \{ag + b\,;\ g \in G\}$
$G + G' = \{g + g'\,;\ g \in G, g' \in G'\}$
$l(G) = \max G - \min G + 1$
$G \oplus G' = G \cup G'\ (G \cap G' = \emptyset)$

３．定義

（１）　タイルの定義

整数の部分集合をタイルと定義する。
特に、タイル$\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$をC_nと書く。
タイルはその集合に含まれる整数を正方形と対応させることで一種の図形として捉えることができる。具体例としてC_4を図１に示す。

（２）　合同の定義

タイルGがタイルHと合同であるとは、$G \subset \{\pm H + a\,;\ a \in \mathbb{Z}\}$であることとする。
これを記号で$G \equiv H$と書く。

（３）　分割の定義

G, Hをタイルとする。HがGを分割する、GがHに分割可能とは

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n\ (H \equiv H_i)$$

であることをいい、これを$H \to G$と書く。
具体例としてC_6の分割を**図２ア**に示す。
また、$Div\,G = \{H\,;\,H \to G\}$と定め、これより$p$が素数のとき、$Div\,C_p = \{C_1, C_p\}$となる（**図２イ**）。

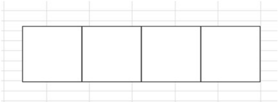

図１　C_4のタイル

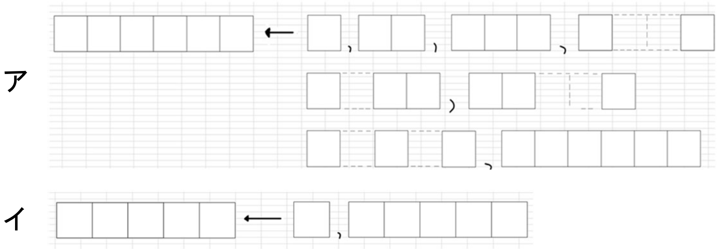

図２　タイルの分割

21（**４）タイルの別表示の定義**

タイルG**が**$G = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$**と表せるとき、**$G$**を**

$$G \sim (a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, b_{n-1}, a_n)$$

と書く。ただし、$a \in A_i$**ならば**$a+1 \in A_i$**または**$a-1 \in A_i$, $\max A_i < \min A_{i+1}$, $a_i = |A_i|$, $b_i = \min A_{i+1} - \max A_i - 1$**である。**

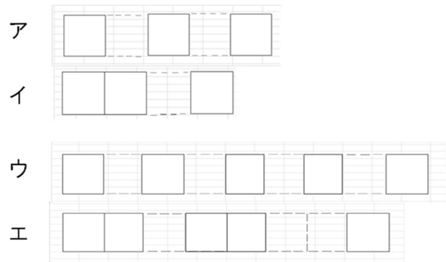

図３　C_{2p}の相補性定理(1.1)

４．結果

(1) C_{2p}の相補性定理(1.1)

pを素数とする。このとき以下の等式が成り立つ。

$$Div\,C_{2p} = \{C_1, C_2, \{1, p+1\}, C_p\} \cup \{C_1 \oplus A\,;\,2p+1 \notin A+A, |A| = p-1, A \subset C_{2p}\}$$

具体例($p=3$)の場合、以下のいずれの場合もC_6を分割する。

① (1), (2,5), (3,4)この中から1,5,3をとる（**図３ア**）
② 次に1,2,4をとる（**図３イ**）

具体例($p=5$)の場合、以下のいずれの場合もC_{10}を分割する。

① (1), (2,9), (3,8), (4,7), (5,6)この中から1,9,3,7,5をとる（**図３ウ**）。
② 次に1,2,8,4,5をとる（**図３エ**）。

(2)　補題(1.2)

G, G'が空でない整数の部分集合、aが整数であるとき
$G \cap (G'+a) = \emptyset \Leftrightarrow a \notin G - G'$が成立する。

証明

(⇒) 仮定より任意の$g \in G, g' \in G'$に対し$g \neq g' + a$が成り立ち、$a \neq g - g' \in G - G'$よって真

(⇐)対偶を取ると$G \cap (G'+a) \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in G - G'$
仮定よりある$g' \in G'$が存在して$g' + a \in G$となるので$a \in G - g' \subset G - G'$よって真

(3) (1.1)の証明
あるタイルH $(|H| = p)$がC_{2p}を分割すると仮定する。

このとき$\min H = 1$としても一般性を失わず、仮定よりHは

$$C_{2p} = H \oplus (-H + 2p + 1)$$

または

$$C_{2p} = H \oplus \left(H + 2p - l(H)\right)$$

のいずれかを満たす。
後者の式を満たすHは$H \sim (a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, b_{n-1}, a_n)$としたときに、

$$a_i = b_i = b_{i+1}\ (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

即ちkを定数としたときに$a_i = b_i = k$を満たし、これから

$$H = C_p, \{2n-1\ ;\ n = 1,2,\cdots,p\}$$

がわかる。
よって前者の式を満たすHが解である。補題(1.2)よりHは

$$2p + 1 \notin H - (-H) = H + H$$

を満たす。これより題意は容易に示せる。

定理（1.1）の証明において$C_{2p} = H \oplus \left(H + 2p - l(H)\right)$を満たす$H$をタイルの別表示を用いて求めたが、それを使わずに求める方法もある。

(4)　補題(1.3)

H ($\min H = 1, l(H) \leq 2p - 1$)が空でない整数の部分集合、$p$が素数であるとき
$2p - l(H) \notin H - H$かつ$|H| = p$を満たすHは
$H = C_p, \{2n - 1\ ;\ n = 1,2,\cdots,p\}$の２つのみである。

（証明）

タイルHを$\min H = 1, l(H) \leq 2p - 1$と定め、$k = 2p - l(H)$とおく。
このとき次のような集合を考える。

$$X(x_1) = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\ ;\ x_{i+1} - x_i = k, x_1 < x_2 < \cdots < x_{r-1} < x_r \leq l(H) < x_{r+1}\}$$

すると

$$C_{l(H)} = X(1) \oplus X(2) \oplus \cdots \oplus X(k)$$

が成り立つ。ここでそれぞれの$X(i)$に対して添え字が連番にならないような選び方をされたものを要素とする集合を$R\left(X(i)\right)$と書く。このとき

$$\{H\ ;\ k \notin H - H\} = R\left(X(1)\right) \oplus R\left(X(2)\right) \oplus \cdots \oplus R\left(X(k)\right)$$

が成り立つので$|H| = p$となるように各$R\left(X(i)\right)$を選んでいけばよいことがわかる。
ここでどのような選び方をしても$l(H) = p, 2p - 1$以外のときには

$$\left|R\left(X(1)\right) \oplus R\left(X(2)\right) \oplus \cdots \oplus R\left(X(k)\right)\right| < p$$

となることを示す。

$$X(1) = \{1, 1 + k, \cdots, 1 + nk\} \left(n = \frac{floor(l(H) - 1)}{2p - l(H)}\right)$$

とすると

$$l(H) - (1 + nk) + 1 = nl(H) + l(H) - 2np$$

より

$$|X(1)| = |X(2)| = \cdots = |X(nl(H) + l(H) - 2np)| = n + 1$$

また、

$$\frac{nk-(nl(H)+l(H)-2np+1)+1-(n+1-2)(nl(H)+l(H)-2np)}{n}$$
$$=2p-2l(H)-nl(H)+2np$$

より$|X(i)|=n$となるiの個数が$2p-2l(H)-nl(H)+2np$であることがわかり、

$\left|R\left(X(i)\right)\right| \leq ceil\left(\frac{X(i)}{2}\right)$であることから次の命題を示せば良いことになる。

命題(1.3.1)

$$ceil\left(\frac{n+1}{2}\right)(nl(H)+l(H)-2np)+ceil\left(\frac{n}{2}\right)(2p-2l(H)-nl(H)+2np) \leq p$$

等号成立条件は$l(H)=p,2p-1$

（証明）

(i)nが奇数のとき$ceil\left(\frac{n+1}{2}\right)=ceil\left(\frac{n}{2}\right)$なので左辺は

$$\frac{n\left(2p-l(H)\right)-l(H)}{2}+p$$

よって、$n\left(2p-l(H)\right)-l(H) \leq 0$を示せばよく

$$n\left(2p-l(H)\right)-l(H) \leq \frac{l(H)-1}{2p-l(H)}\left(2p-l(H)\right)-l(H)=-1$$

よりこれは真

(ii)nが偶数のとき$ceil\left(\frac{n+1}{2}\right)=ceil\left(\frac{n}{2}\right)+1$なので

$$\frac{n(l(H)-2p)}{2}+l(H) \leq p$$

よって、

$$n(l(H)-2p)+2l(H)-2p \leq 0$$

を示せばよいがこれは明らかに成り立っている。次に等号成立条件を求める。nについて解くと

$$n \leq \frac{2l(H)-2p}{2p-l(H)}=\frac{l(H)}{2p-l(H)}-1$$

nは整数なので$a = 2p - l(H), b = l(H)$とおくと$a = kb\ (k \in \mathbb{Z})$が成り立ち、連立方程式$a + b = 2p, a = kb$を解くと$(a, b) = (1,2p - 1), (2p - 2), (p, p), (2p, 0)$条件より$(a, b) = (1,2p - 1), (p, p)$となり、代入すると$n = \frac{l(H)}{2p-l(H)} - 1$は成立する。よって命題(1.3.1)は示されたと同時に補題(1.3)も証明されたこととなる。

５．まとめと今後の課題

Cの添え字の素因数が増加すればするほど解析は困難となるため、今後は新しい方法を探究していきたい。