三角形の外接円と五心に関する研究

愛媛県立松山南高等学校　　数学班
佐伯心太朗　　藤田幸星　　　指導教諭　福澤純治

１．はじめに

数学の学習を進めるにあたって、興味深い図形の性質に出会うことがある。入試問題においても解きながらその不思議さや美しさに驚く日々である。このような図形の性質について、深く知りたいと考えるようになった。そこで、図形の性質について、特に三角形の五心と外接円の関係について研究することにした。

２．方法

主に図形描画ソフト「Geogebra」を用いて性質を予想し、それが正しいかどうか調べた。

３．結果

【命題１】

三角形の垂心と外接円について、次の条件α、βは同値である。

条件α：「点Ｐが垂心である。」

条件β：「$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}$ で定められた点D、E、Fは△ABC の外接円上にある」

(1)　△ABCが∠A=90°の直角三角形である場合

垂心と頂点Aが一致するため、$\alpha\rightarrow\beta$ は容易に示せる。

一方、その逆 $\alpha\leftarrow\beta$ の証明に思いがけず苦労した。結局は「点Pが垂心と一致しない場合は不適であることを示す」という方法を用いたため、長くなってしまい、ここには書けない。

(2)　△ABCが鋭角三角形である場合（図１）

［ｉ］$\alpha\rightarrow\beta$ の証明

点Pが△ABCの垂心であるとする。このとき、直線APと辺BCの交点をH_1、直線BPと辺CAの交点をH_2とすると、$\angle PH_1C=\angle PH_2C=90°$ であるから、四角形CH_1PH_2は円に内接し、

$\angle H_1PH_2=180°-\angle ACB$

また、対頂角は等しいから、

$\angle APB=\angle H_1PH_2=180°-\angle ACB$

PD＝PA＋PBより四角形PADBは平行四辺形だから、

$\angle ADB=\angle APB=180°-\angle ACB$

よって、$\angle ADB+\angle ACB=180°$ だから、4点A、B、C、Dは同一円周上にある。‥①

同様に4点A、B、C、Eは同一円周上にある。‥②

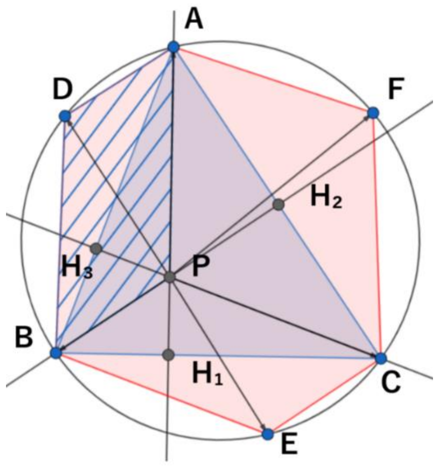

図１　△ABCが鋭角三角形である場合

同様に 4 点 A、B、C、F は同一円周上にある。‥③

①、②、③より、３点 D、E、F は△ABC の外接円周上にあるから、6 点 A、B、C、D、E、F は同一円周上にある。

［ⅱ］ $\alpha \leftarrow \beta$ の証明

逆に 6 点 A、B、C、D、E、F が同一円周上にあるとする。四角形 ADBP、CFAP は平行四辺形であるから、

FC//AP//DB、FC=AP＝DB

よって FC＝DB かつ FC//DB だから四角形 BCFD は平行四辺形である。さらに 4 点 B、C、F、D が同一円周上にあることから、∠DBC+∠DFC＝2∠DBC＝180°

よって∠DBC=90° ‥④

ここで、点 A から辺 BC に垂線 AH_1 をおろすと、AH_1⊥BC

これと④より AH_1//DB

さらに AP//DB であるから、点 P は垂線 AH_1 上にある。

同様にすると、B から辺 CA におろした垂線 BH_2、点 C から辺 AB におろした垂線 AH_3 も点 P を通る。

よって、点 P は△ABC の垂心と一致する。

［ⅰ］、［ⅱ］より $\alpha \leftrightarrow \beta$ だから、題意は示された。

(3)　△ABC が鈍角三角形である場合（∠A＞90°）（図２）

∠A＞90° としても一般性は失われないから、∠A＞90° とする。

［ⅰ］ $\alpha \rightarrow \beta$ の証明

点 P が△ABC の垂心であるとする。頂点 A から辺 BC におろした垂線のあしを H_1、頂点 B、C から各々の対辺の延長におろした垂線のあしをそれぞれ H_1、H_2 とする。点 P は△ABC の垂心であるから、3 点 P、A、H_1;P、H_2、B;P、H_3、C はそれぞれ同一直線上にある。

よって、∠BPH_1＝180° －∠PH_1B－∠H_2BH_1

＝180° －90° － (90° －∠ACB)

＝∠ACB

∠CPH_1＝180° －∠PH_1C－∠H_3CH_1

＝180° －90° － (90° －∠ABC)

＝∠ABC

∠BPC ＝∠BPH_1＋∠CPH_1＝∠ABC＋∠ACB

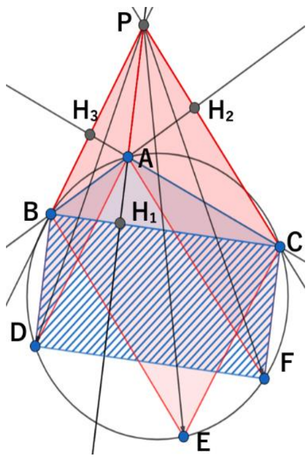

図２　△ABC が鈍角三角形である場合（∠A＞90°）

四角形 PBEC は平行四辺形であるから、

∠BEC＝∠BPC＝∠ABC＋∠ACB

△ABC において、∠BAC＝180° －∠ABC－∠ACB

ゆえに、∠BAC＋∠BEC＝180° が成り立つから、4 点 A、B、E、C は同一円周上にある。‥①

また、四角形 PADB は平行四辺形であるから、∠ADB＝∠APB＝∠H_1PB＝∠ACB

ゆえに、円周角の定理の逆から 4 点 A、C、F、B は同一円周上にある。‥②

同様に 4 点 A、C、F、B は同一円周上にある。‥③

①、②、③から、6 点 A、B、C、D、E、F は同一円周上にある。

［ⅱ］$\alpha \leftarrow \beta$ の証明

逆に、六点 A,B,C,D,E,F が同一円周上にあるとする。四角形 AFCP,ADBP は平行四辺形であるから、
CF=PA=BD, CF//PA//BD

よって CF=BD かつ CF//BD から、四角形 BDFC は平行四辺形であり、∠DBC=∠DFC が成り立つ。

さらに仮定より四角形 BDFC は円に内接するから、

∠DBC+∠DFC=2∠DBC=180°　よって∠DBC=90°

ここで、円周角の定理より∠ADB=∠ACB　四角形 ADBP は平行四辺形であるから、

∠PBD=180° −∠APB=180° −∠ACB

ゆえに、

∠ABP=∠PBD−∠ABC−∠CBD=90° −∠ABC−∠ACB・・・④

また、B から辺 CA の延長に下した垂線の足を H_2 とすると、∠CBH_2=90° −∠ACB だから、

∠ABH_2=∠CBH_2−∠ABC=90° −∠ABC−∠ACB・・・⑤

④と⑤より∠ABP=∠ABH_2 であるから、点 P は垂線 BH_2 の延長上にある。・・・⑥

さらに、C から辺 BA の延長上に下した垂線の足を H_3 とする。このとき⑥と同様に考えて、点 P は垂線 CH_3 の延長上にある。・・・⑦

⑥と⑦より、点 P は△ABC の垂心と一致する。

［ⅰ］と［ⅱ］より、$\alpha \leftrightarrow \beta$ であることが示された。

【命題２】

△ABC の垂心を各辺に関して対称移動した点 D、E、F は△ABC の外接円上にある。平面上の点 P を各辺について対象移動した点 D、E、F が△ABC の外接円上にあるならば、点 P は△ABC の垂心である。

(1)　△ABC が鋭角三角形である場合

三角形 ABC の垂心を各辺に関して対象移動した点 D、E、F は△ABC の外接円上にある。

∠H_2PH_1＝180° －∠C＝∠APB＝∠D、　∠C＋∠D＝∠C＋（180° －∠C）＝180°

以上より、四角形 ADBC は△ABC の外接円上にある（**図３**）。

D を通り AB に平行な直線と外接円の交点を D′ とすると、四角形 AD′ BP は平行四辺形になる。

また、E を通り BC に平行な直線と外接円の交点を E′ とすると、四角形 BE′ CP は平行四辺形になる。

また、F を通り、CA に平行な直線と外接円の交点を F′ とすると、四角形 CF′ AP は平行四辺形になる。

よって、前回示した内容より、P は△ABC の垂心である（**図４**）。

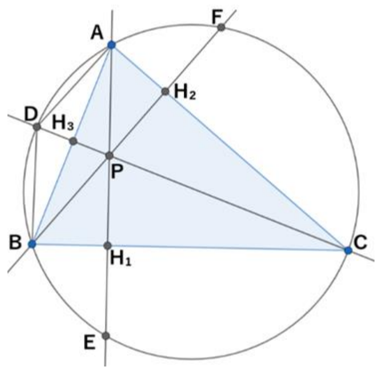

図３　△ABC が鋭角三角形である場合(1)

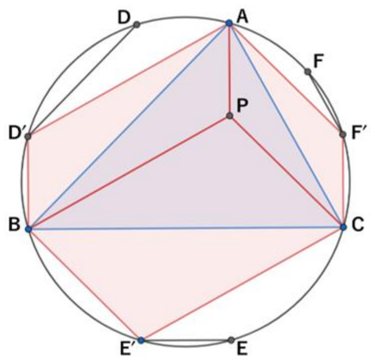

図４　△ABC が鋭角三角形である場合(2)

４．まとめと今後の展望

(1)　次の条件α、βは同値である。

条件α：「点Ｐが垂心である。」

条件β：「$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}$で定められた点D、E、Fは △ABC の外接円上にある」

(2)　△ABCの垂心を各辺に関して対称移動した点D、E、Fは△ABCの外接円上にある。平面上の点Ｐを各辺について対象移動した点D、E、Fが△ABCの外接円上にあるならば、点Ｐは△ABCの垂心である。

(3)　垂心以外の五心についても、GeoGebra を用いて、上記で示したようなものと同じような規則がないか調べたが、行き詰ってしまった。今後は、今後は、円についてより深く思考してみるなど検討している。

５．参考文献

・チャート研究所 編著「増補改訂版　チャート式　基礎からの数学Ⅰ＋A」数研出版株式会社, p548
・聖文社編「高校生の数学ハンドブック」株式会社聖文社, p229,236,237,247～249
・笹部貞市郎 (1963)「問題解法　解析幾何学辞典」株式会社聖文社, p883～887
・岩田至康編 (1978)「幾何学大辞典第１巻」槙書店,p184～201
・岩田至康編 (1978)「幾何学大辞典第３巻」槙書店,p72～88
・岩田至康編 (1978)「幾何学大辞典第５巻」槙書店,p29～50