ウェアリングの問題の研究

愛媛県立松山南高等学校　ウェアリング班

玉井啓史

指導教諭　笹岡慎太郎

１．背景・目的

ある自然数は任意のp 乗数の形であらわすことが出来る(pは自然数)。単純に考えればただこの事実だけで終わらせていただろう。しかしこの形で表すのに必要なk乗数はいくつ必要なのか、といった純粋な好奇心からこの問題が誕生したのだと考えられる。私はこのような問題の中で「四平方和定理」(すべての自然数は 2 乗された自然数が少なくとも 4 個あれば表すことができる)ということに興味を持ち様々な文献を調べるようになった。

私は昨年度、ウェアリング問題の可視化について研究していたが、その中でも、四平方定理を用いて、それを四次元空間上に表現できないかと模索した。しかし、良い結果が得られなかった。そのとき、数学Ｂの数列の授業で、自然数の累乗和について学習し、p 乗数の和で構成されている式構成が本研究と関連性があると感じた。また中井ら(2020)によって、$S_P = \sum_{k=1}^{n} k^p$において$S_1^2 = S_3$という関係性を図形的に表現し、説明できることを知った。そこで、自然数の累乗和の一般化と、それらを可視化することにより、ウェアリング問題の知識構造の把握が容易になり、数学が苦手な人でもウェアリング問題を知ってもらう機会が増えることを願い、この研究を行った。

２．方法

(1)　積分を用いて$\sum_{k=1}^{n} k^p$ を一般化した式の導出

$f_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + \cdots + n^m$ としたとき、恒等式$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i k^i$と階差数列の和の考え方、及び積分を用いて $f_m(n)$を２通りの式で表す。

(2)　導出された $f_m(n)$ を用いて表される $f_4(n)$、$f_5(n)$ の考察

$f_4(n)$、$f_5(n)$ を式変形し、積の形にしたとき、縦、横、高さのそれぞれの長さにおける n の次数が少なくなるよう分割する。そして分割した式に着目して階差数列を求めていき、pがある任意の自然数であるときに必要な体積について変化を調べる。

３．結果

(1)　積分を用いて$\sum_{k=1}^{n} k^p$ を一般化した式の導出

恒等式$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i k^i$ について、$k = 1,2,\cdots n$ の場合を考えると

$$2^{m+1} - 1^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i 1^i$$

$$3^{m+1} - 2^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i 2^i$$

$$(n+1)^{m+1} - n^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i n^i$$

となり、これらを加えると

$$(n+1)^{m+1} - 1 = \sum_{i=0}^{m} {}_{m+1}C_i f_i(n)$$

となる。右辺の総和記号を式変形すると

$$(n+1)^{m+1}-1=\sum_{i=0}^{m-1}{}_{m+1}C_i f_i(n)+{}_{m+1}C_m f_m(n)$$

となり、m > 1 において

$$f_m(n)=\frac{1}{m+1}\{(n+1)^{m+1}-1-\sum_{i=0}^{m-1}{}_{m+1}C_i f_i(n)\} \quad (3.1)$$

が導出される。更に$m=m_0+1$ とすると

$$f_{m_0+1}(n)=\frac{1}{m_0+2}\{(n+1)^{m_0+2}-1-\sum_{i=0}^{m_0}{}_{m_0+2}C_i f_i(n)\}$$

となり、$n=0$ を代入すると

$$f_{m_0+1}(0)=\frac{1}{m_0+2}(-\sum_{i=0}^{m_0}{}_{m_0+2}C_i f_i(0))$$

となり、$f_m(0)=0$ よりこの式の値は 0 となる。

また、積分を用いて

$$f_m(n)=\int_0^n mf_{m-1}(t)dt+(1-\int_0^1 mf_{m-1}(t)dt)n \qquad (3.2)$$

を導出した。

(3. 2)の式を導出するうえで$\int_x^{x+1} f_p(t)dt=x^p$となるような関数$f(t)$について考える。この関数を導出することで x が自然数の時、任意の連続する自然数を範囲とする積分区間において面積がそれらの自然数の小さいほうの値となるため、このことを利用すると1^pからk^pまでの和は

$$\int_1^2 f_p(t)+\int_2^3 f_p(t)+\int_3^4 f_p(t)+\cdots+\int_n^{n+1} f_p(t)$$

と表すことができる。

また同一の関数の積分において、積分する範囲が連続している場合はまとめることが出来るので、上記の関数は

$$\int_1^{n+1} f(t)_p$$

と表すことができ、この関数が$\sum_{k=1}^{n} k^p$の数列の和を表している。このように表すこともできる上に、今回では 1 からkまでの等比数列の和から 1 から$k-1$ までの等比数列を引くと第 k 項が残ることを利用する。k^rの 1 からkまでの数列の和を$s^r\,(k)$と置くと、

$$s^r\,(k)-s^r\,(k-1)=k^r$$

この式を微分する。

$$(S^r\,(k))'-\left(S^r\,(k-1)\right)'=rk^{r-1}$$

ここで、$k=1,2,3\cdots t$と代入した式について考察をすると

$$(S^r\,(1))'-(S^r\,(0))'=\mathrm{r}\cdot 1^{r-1}$$
$$(S^r\,(2))'-(S^r\,(1))'=\mathrm{r}\cdot 2^{r-1}$$
$$\vdots$$
$$(S^r\,(\mathrm{n}))'-(S^r\,(\mathrm{n}-1))'=r\cdot \mathrm{n}^{r-1}$$

となり、この数列の和は

$$(S^r(\mathrm{n}))' - (S^r(0))' = \mathrm{r}S^{r-1}(n)$$

このような式を積分することにより、$s^r(k)$の値について考察することが出来る。

(2)　導出された $f_m(n)$ を用いて表される $f_4(n)$、$f_5(n)$ の考察

(3.1)は次数が大きくなるほど導出の過程が長くなり、多くの時間を要する。(3.2)は次数が大きくなっても(3.1)を用いた場合と比較して計算量が少ない。また、$f_4(n)$、$f_5(n)$ ともに式変形によって、２次以下の指数の積で表された。

４．考察

5 次の和の時にすべての成分が 2 次の式となったので、６次以上の和となると必ず３次以上となる長さの成分が出てくるのが容易に想定できる。しかし、今回のように元々の和の式に幾らか掛けることにより全ての長さが自然数として出てくるので、工夫を重ねる必要性がより高まったことが分かった。もしくは６次以上であれば４次元などを用いれば共通点を見つけられる可能性もある。

また、今回の試行(r=0, 1, 2, 3 も含む)で次のような予想を立てた。

$\left[\sum_{k=1}^{n} t = nt\right]$	$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$	$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$

○rが奇数で$\sum_{k=1}^{n} k^r$を積の形に表したとき→n(n+1)を因数に持つ$r \geq 3$ではこれらの因数が二乗の形となって出てくる。

○rが偶数で$\sum_{k=1}^{n} k^r$を積の形に表したとき→n(n+1)(2n+1)を因数に持つ。

実際に r=6 の時は$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^3-6n^2+3n-1)$となり、この形で表すことができることがわかった。

このことを用いると、立体的に表す場合にこのような形で表される部分はある長さに固定して考えることが可能であると推測される。

５．結論

今回の試行では、どちらの場合でも全ての長さの成分が２次以下とすることができたので階差数列を取ると１次の式にすることが出来た。殆どは一般化した式で増加分の長さを表すことが出来たが、p＝4,5でn＝1 のほとんどの長さが一般化した形で表すことができなかった。(表１)

また、$p=4$　の場合において、k がある任意の自然数であるときに必要な体積において、模型を作成し、考察することができた。(図１～図３)

表１　p=4，５の時の各長さの増加量

$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$				$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$			
p=4の場合	(上記の式 ×15)			p=5の場合	(上記の式 ×3)		
加える長さ	縦	横	高さ	加える長さ	縦	横	高さ
n=1	2	2	12	n=1	1	1	3
n=2	2	3	18	n=2	2	2	8
n=3	2	4	24	n=3	3	3	12
n=t	2	1+t	6(t+1)	n=t	t	t	4t
全体の長さ	2n+1	$\frac{n(n+1)}{2}$	$3n^2+3n-1$	全体の長さ	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$2n^2+2n-1$

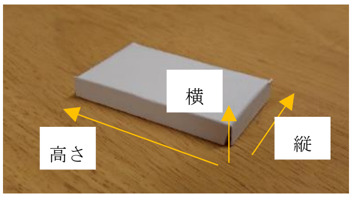

図１　n=１

図２　n=２

図３　n=３

６．今後の課題

r=4, 5 における$\sum_{k=1}^{n} k^r$を実際に模型を用いて表すことが出来たので実際に自分もどのような値の増え方をするのかが視覚的に学ぶことが出来たことが今回の活動を通して 1 番よかったことであると思った。しかし、今回の研究はまだ十分とは言えない結果しか残していないので、今後はこのような試行を重ねていき、pが変数であるときに縦、横、高さをどのようにすれば次数を最も少なくし、規則性が可視化できやすい形になるのか、について探求していきたい。

また、このような研究を通して$\sum_{k=1}^{n} k^r$を一般化した式を自らの手で表していくことが現段階での大きな課題であると思った。

７．参考文献

・中井ら(2020)　「‘自然数の累乗和’の累乗公式」滋賀県立彦根東高等学校 2020 課題研究論文
http://www.hikonehg-h.shiga-ec.ed.jp/report