素数の累乗と約数の総和の関係について　～倍積完全数に迫る～

愛媛県立松山南高等学校　数学班
村上和馬　　　　指導教諭　福澤純治　笹岡慎太郎

１．背景・目的

整数は日常にあふれ、特別な意味を持つようには見えない。だが数学的な考察を試みればその整数には、4 は平方数、5 は素数等と、個々に違った特徴があることが分かる。私はこのような整数の不思議な性質に興味を持ったため、数論の研究を始めた。数論の中でも私は完全数に着目した。完全数とは、その正の約数の総和が元の数の２倍になる数のことである。完全数について調べるうちに倍積完全数というものをみつけた。これは完全数が元の数の２倍であるのに対し、それを自然数倍まで拡張したものである。倍積完全数の中でも２倍完全数は完全数のことである。そこで、倍積完全数で一般的な理論が完成すればそれが完全数にも適応でき、間接的に完全数を研究できると考え、倍積完全数を研究することにした。

２．方法

「素数の累乗」とその「約数の総和の素因数分解」の対応表を独自に作成し、倍積完全数の性質を探る。特に、「素数の累乗」とその「約数の総和の素因数分解」の関連性を探る。

３．倍積完全数の性質

「素数の累乗」とその「約数の総和の素因数分解」の対応表（表１）のＡ列から数を適切に選び、選んだＡ列に対応するＢ列の数をすべて掛け合わせることで倍積完全数を作ることができる。

表１　「素数の累乗（Ａ）」とその「約数の総和の素因数分解（Ｂ）」

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4
2	3	3	2^2	5	2×3	7	2^3
2^2	7	3^2	13	5^2	31	7^2	3×19
2^3	3×5	3^3	$2^3\times5$	5^3	$2^2\times3\times13$	7^3	$2^4\times5^2$
2^4	31	3^4	11^2	5^4	11×17	7^4	2801
2^5	$3^2\times7$	3^5	$2^2\times3\times7$	5^5	$2\times3^2\times7\times31$	7^5	$2^3\times3\times19\times43$
2^6	127	3^6	1093	5^6	19531	7^6	29×4733
2^7	$3\times5\times17$	3^7	$2^4\times5\times41$	5^7	$2^3\times3\times13\times313$	7^7	$2^5\times5^2\times1201$
2^8	7×73	3^8	13×757	5^8	$19\times31\times829$	7^8	$3^2\times19\times37\times1063$

（n を自然数、σ (n) を n の約数の総和、$k=\frac{\sigma(n)}{n}$として、k 倍完全数とする。）

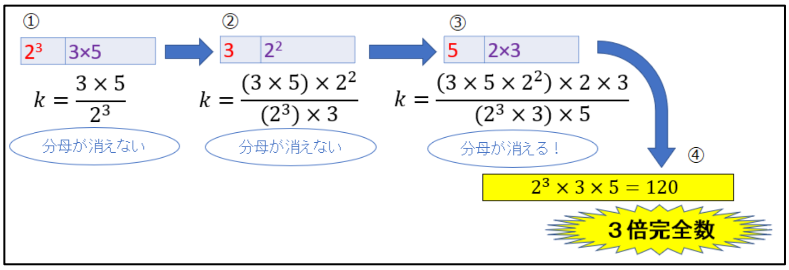

図１　表を用いた倍積完全数の作り方

例として、３倍完全数 120 を作る過程を示す。

① A_1列から 2^3 を選ぶ。対応するのは 3×5 である。

$k=\frac{3\times5}{2^3}$となる。k は自然数でなければならないがこのままでは自然数にならない。

② A_2列から 3 を選ぶ。対応するのは 2^3。 $k=\frac{(3\times5)\times2^3}{(2^3)\times3}$ となる。まだ k が自然数にならない。

③ A_3列から 5 を選ぶ。対応するのは2×3。 $k=\frac{(3\times5)\times(2^3)\times2\times3}{(2^3)\times(3)\times5}=3$で k が自然数となるためA列から数を選ぶ作業を終了する。

④ 選んだA列の数 2^3，3，5 を全てかけると 120 になる。これで３倍完全数 120 の完成である。

このように表から選んだ数に関して $\frac{\text{隣接するB列の数の積}}{\text{選んだA列の数の積}}$ が自然数とならなければいけないが、そうなるためにはどのようにA列から数を選べばよいかについては明らかになっていない。

一方で、表１からいくつかの法則性が見つかった。その中でも特に『A列で素数の奇数乗になっているものの約数の総和が、その素数の１乗の約数の総和の倍数になっている』ということに注目した。例えば 3^5 の約数の総和は、3 の約数の総和の倍数（つまり 2^2＝４の倍数）になる（表２）。

底 2 の場合を例にして表３を作成した。左列に指数を 1 から順に並べる。そしてそれらの実際の値とその約数の総和、そしてその左側にはそれぞれの素因数分解の指数を表している。例えば 2^5 の約数の総和は 63 で素因数分解すると $3^2\times7$ となり、3 の指数が 2、7 の指数が 1 であるから、3 の列に 2、7 の列に 1 を入力している。この表の列を見ると素因数分解の指数が一定の間隔で現れていることが分かる。例えば 3 の列には、元の数の指数が 1，3，5 のように奇数の時のみ数が現れている。3 以外の列でもある一定の規則性が見られた。底を 2 以外にして同様の表を作っても素因数分解の指数に規則性が見られた。そこで、素数の累乗の約数の総和にはある一定の規則性があるのではないかと考えた。今作成している表のすべての列に関して言えることが次の２つである。

表２　表１の抜粋

A_2	B_2
3	2^2
…	…
3^5	$2^2\times3\times7$

- 約数の総和の任意の素因数はある一定の間隔で現れる。
- その一定の間隔を s とした時、最初に数が現れるのは元の数の指数が s−1 のとき。

表３　２の累乗とその約数の総和の素因数分解２

指数	値	約数の総和		2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	…
1	2	(1+2=)	3		1										…
2	4	(1+2+4=)	7				1								…
3	8	(1+2+4+8=)	15		1	1									…
4	16	(1+2+4+8+16=)	31											1	…
5	32	(…=)	63		2		1								…
6	64	(…=)	127												…
7	128	(…=)	255		1	1				1					…
8	256	(…=)	511				1								…
…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

４．主張と整理

以上のことを踏まえて、以下に主張としてまとめる。

表３の素因数５の列について、指数が規則的に現れるということは「素数の累乗の約数の総和が５の倍数であるものが規則的に現れている」と言い換えられる。ここで逆に、素数２の累乗の約数の総和が５の倍数であるための必要十分条件を考えてみる。

$\sigma(2^{n}) = 1 + 2^{2} + 2^{3} + \cdots + 2^{n} + 2^{n+1}$

$= \frac{1(2^{n+1}-1)}{2-1} = 2^{n+1} - 1$

つまり、$2^{n+1} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$であればよい。

$2^{n+1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$

ここで２の累乗が５で割って１余るとき、その指数を１ずつ増やすとその余りは

1, 2, 4, 3, 1, 2, 4…

というように４つずつ循環することがわかる（図２）。

つまり、$\sigma(2^{n})$（nは自然数）が５の倍数であるような自然数ｎは４個の連続する自然数の中に１個ずつ定期的に表れることがわかる。実際に表３で確認すると４個に１個ずつ素因数５が現れることが確認された。

これを合同式で表現すると、約数の総和が５の倍数になるような最小の２の累乗は2^3で、ここから指数が４ずつ増えるから、$\boldsymbol{\sigma(2^{4n-1}) \equiv 0 (mod\ 5)}$となる。

$$2^{n+1} \equiv 1 (mod\ 5)$$
$$2^{n+2} \equiv 2 (mod\ 5)$$
$$2^{n+3} \equiv 4 (mod\ 5)$$
$$2^{n+4} \equiv 8 \equiv 3 (mod\ 5)$$
$$2^{n+5} \equiv 6 \equiv 1 (mod\ 5)$$

図２　５で割った余りの進行

この例から、素数の累乗をそれと異なる素数で割った余りの周期は、表３にみられる周期に密接に関係しているのではないかと考えた。

ここで、先ほどの式を一般化した主張を次のようにまとめた。

$\mathbf{p, a}$を相異なる素数、$\mathbf{n}$を自然数とする。$\mathbf{s}$を、$\mathbf{p}$で $\mathbf{a}$の累乗を割った余りの循環の周期であるとする。このとき、$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}^{\mathbf{sn-1}}) \equiv \mathbf{0} (\mathbf{mod\ p})$

別の表現をすると

$\sigma(a^{sn-1}) = a^{sn} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$

$a^{sn} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$

ここで、p, aは相異なる素数であるから互いに素、フェルマーの小定理より

$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$

つまり

$a^{p-1} \equiv a^{sn} (\mathrm{mod}\ p)$

底aが両辺で共通で、素数pで割った余りが等しいから、指数について、$p-1$ と sn は s を法として合同となる。（∵s は a の累乗を素数 p で割った余りの周期）つまり

$p - 1 \equiv sn (\mathrm{mod}\ s)$

$p - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ s)$

つまり、sは$p-1$の約数となる。

これによって、周期 s が $p-1$ の約数であることを示せば、s と表３にみられる周期が密接に関係しているといえる。実際に表で確認したところ確認できる範囲内のすべての場所で sは$p-1$ の約数となった。また、$\frac{p-1}{s}$ を実際に求めてみたが（表４）そこに法則性のようなものは今のところ見出すことができなかった。

表４　a＝2の場合の $\frac{p-1}{s}$

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
s	2	4	3	10	12	8	18	11	28	5
$\frac{p-1}{s}$	1	1	2	1	1	2	1	2	1	6

５．今後の課題

表１でＡ列から選んだ数がどのような条件をみたすべきかについては明らかになっている。ここでＢ列に該当する素数の累乗の約数の総和に規則性や法則性が見つかれば、素数の累乗の約数の総和をある程度予測することができるようになるため、Ａ列から数を選ぶ手順を推察することができる。また、今まではそれぞれの表を作るときに、

［素数の累乗を計算→その約数の総和を求める→それを素因数分解する］

という時間のかかる手順を踏んでいた。素数の累乗を順に計算するということは等比数列を１つずつ順に求めているようなもので数が非常に大きなものになりやすく、計算に時間が掛かる上、コンピュータでは処理できないほど大きな数になってしまうことがよくあり、パソコンがフリーズするという事態もしばしば見られたため、作業の効率化を図りたい。

主張をある程度まとめることはできたが、証明しようと思うと難解であった。だが、これを証明することができれば、表３の規則性と４.主張と整理で用いたｓ が完全に結びつくことになり、問題になっていることを別の角度から見つめることができるようになるので、この主張の証明を進めるとともに、素数の累乗をそれと異なる素数で割った時のあまりの周期についても調べていきたいと思う。

６．参考文献

・The Multiply Perfect Numbers Page「http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/mpn.html」
・オンライン整数列大辞典「https://oeis.org/」