トーラスパズルの製作と研究
―完成させるための条件とその判別方法―

愛媛県立松山南高等学校

石田　航暉　　岡本　晴気　　永井　裕人　　松尾　龍冴

[Abstract]

We created a new type of puzzle called “Torus-puzzle”, which is derived from a 15-puzzle. We have studied this kind of puzzle to reveal whether it’s always possible for the puzzle to be cleared. We succeeded in proving our theory with the idea of “permutation.” As a result, this research shows that it is always possible for the puzzle to be cleared when the number of the pieces of the puzzle is an even number, on the other hand, it isn’t always possible to clear the puzzle when the number is an odd number. (Provided the number of pieces in both the lines and rows are more than 1.)

１　はじめに

当初、15 パズルの研究をしようとしていた。しかし、試行を重ねるうちに、15 パズルではピースを一つずつ動かしていくために、端から順に揃え、完成形を目指すことができるということがわかった。そこで、一回の操作で複数のピースが動き、１つずつ揃えていくのが難しいパズルを独自に製作することにした。新しいパズルを製作し、試行を重ねると、このパズルには完成できない配置があることに気づいた。そこで、どのように動かしても完成できない配置の条件を調べることにした。

２　15 パズルについて

縦にｍ個、横にｎ個の m×n マスの盤面に１～mn－１までの mn－１個のピースをランダムに配置する。すると、１つの空白のマスができる。空白のマスに、上下左右に隣り合うピースのどれかを動かすことで、動かす前のピースの位置に空白のマスが現れる。同様に、１つずつピースを動かしていく。このような操作を繰り返していくことで、**図１**の完成形を目指すパズルである。

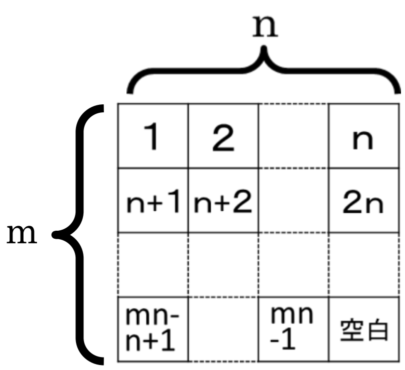


図１　15 パズルの完成形

先行研究 [1)2)] から、15 パズルは完成形から奇数回ピース同士を入れ替えた盤面では完成することができず、完成形から偶数回ピース同士を入れ替えた盤面では完成することができるということがわかっている。

これらに基づき、15 パズルを完成するために、**図２**のような①→②→③の順番で揃

えていくと完成できる。

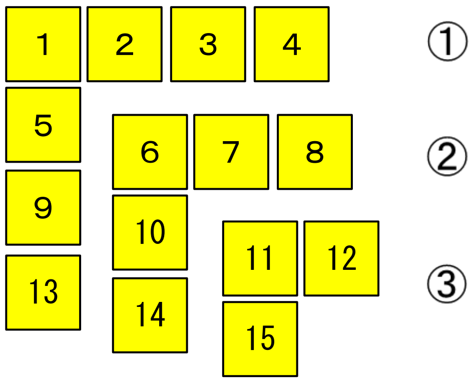


図２　15 パズルの例の完成手順

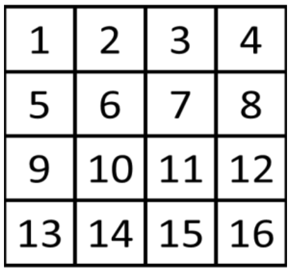


図４　トーラスパズル 4×4 の例

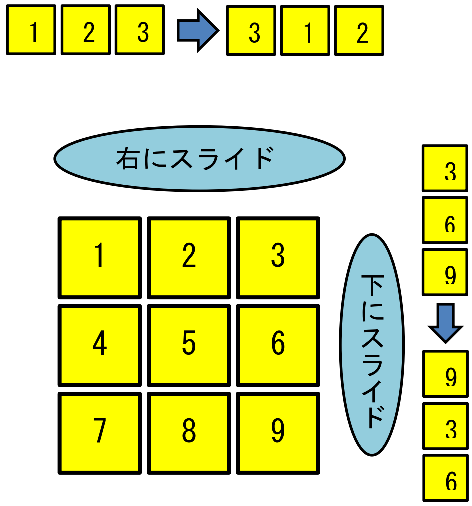


図５　動かし方の例

３　トーラスパズルのルールと定義

縦に m 個、横に n 個の m×n マスの盤面に１～mn までの mn 個のピースをランダムに配置する。縦１列もしくは横１列を選び、上下もしくは左右に動かし、はみ出したピースを同じ順序に空いたマスに入れる。この操作をスライドという。スライドを繰り返してランダムに並んだピースを左上から右下に昇順に並び替える。ピースが左上から右下に昇順に並んだ状態を完成形**図３**と呼ぶ。このスライドはトーラス上で可能な動きのため、このパズルをトーラスパズルと名付ける。

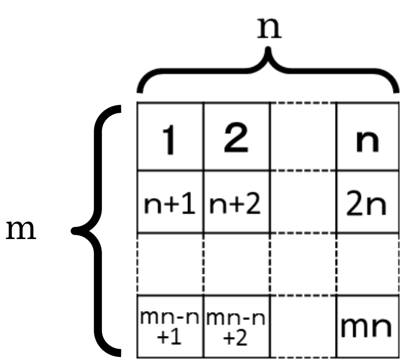


図３　トーラスパズルの完成形

４　研究の目的

(1)　縦横のマスの数によって、ある配置からどのようなスライドを行っても完成形に揃えることができないような条件を示す。

(2)　(1)の条件を判別する方法を考える。

(3)　完成できない条件下でも完成できるようなルールを考える。

(4)　ある配置から完成するための最短手順を求める。

５　研究の方法

トーラスパズルを実際に製作し、試行を

重ねることで、性質を考察し、証明する。

６　試行後の予想

試行を重ねた結果、次のことが分かった。

(1)　3×3 のトーラスパズルは完成することができない配置が存在する。

(2)　2×2、2×3、4×4 のトーラスパズルはどのような配置からでも完成することができる。

このことから m×n のトーラスパズルにおいて、次のような予想を立てた。

(1)　m と n がともに奇数ならば、完成できない配置が存在する。

(2)　m または n が偶数ならば、どのような配置からでも完成することができる。

７　置換について

６の予想を証明するにあたって、置換の考えを用いることにした。

この研究では、置換群について一般に知られている内容として次のことを用いた。

(1)　２つの要素のみを入れ替える置換を特に互換という。

(2)　全ての置換は互換の積で表すことができる。

例　(1, 2, 3, 4)＝(1, 2)　(2, 3)　(3, 4)

(3)　奇数個の互換の積に分解できる置換を奇置換、偶数個の互換の積に分解できる置換を偶置換と呼ぶ。ただし、奇置換は偶数個の互換の積に分解できず、偶置換は奇数個の互換の積に分解できない。これを置換の偶奇の一意性と呼ぶ。

ア　置換の偶奇の一意性の証明

要素$(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$について差積$\triangle(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$を次のように定義する

$\triangle(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)=\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j)$

例）n=2 のとき

$\triangle(x_1, x_2)=(x_2-x_1)$

n=3 のとき

$\triangle(x_1, x_2,\ x_3)$

$=(x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)$

n=4 のとき

$\triangle(x_1, x_2,\ x_3, x_4)$

$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

$(x_4-x_1)\,(x_4-x_2)\,(x_4-x_3)$

ここで差積は交代式と呼ばれ、その性質から

要素$(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$のうち２つの要素を入れ替えたとき、差積$\triangle(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$は－1 倍される。

そして、ある置換 X を k 個の互換の積 $a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k$ と l 個の互換の積 $b_1b_2b_3\cdots b_{l-1}b_l$の２通りの互換の積で表せたとすると

X=$a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k$=$b_1b_2b_3\cdots b_{l-1}b_l$

が成立する

すると

$\triangle$X$(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$

$=\triangle a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_k(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$

$=(-1)^k\triangle(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$

また

$\triangle$X$(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$

$=\triangle b_1b_2b_3\cdots b_{l-1}b_l(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$

$=(-1)^l\triangle(x_1, x_2,\ x_3,\cdots, x_n)$

と表すことができる

この２つの式より$(-1)^k=(-1)^l$ が成り立つことから、k と l 奇は等しい

イ　巡回置換の長さ

置換に含まれる要素の数を巡回置換の

長さと呼ぶ

例　(1, 2, 3, 4)　　長さ４

ここで長さｎの巡回置換はｎ－１個の互換の積で表される

８　トーラスパズルへの置換の導入

トーラスパズルのマスの位置それぞれに下のように 1～m×n までの数字を昇順に割り当てる。

次の**図５**から**図９**までに、数字を割り当てた例を示す。

1	2	3
4	5	6

図６　２×３

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図７　３×３

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図８　４×４

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

図９　５×５

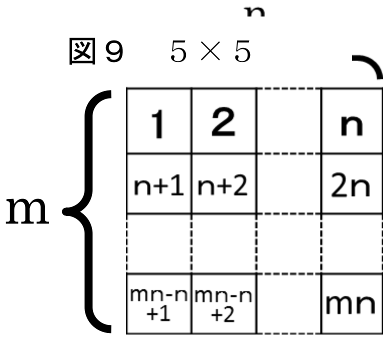


図 10　m×n

トーラスパズルにおける置換を次のように定義する

置換
（a_1, a_2, a_3, ・・・, a_{n-1}, a_n）は
位置a_2にあるピースを位置a_1に
位置a_3にあるピースを位置a_2に
…
位置a_nにあるピースを位置a_{n-1}に
位置a_1にあるピースを位置a_nに移動
することとする。

この定義を具体的に、次の**図 11**、**図 12** で示す。

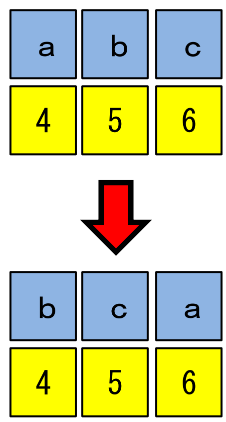


図　11　２×３のパズルにおける置換

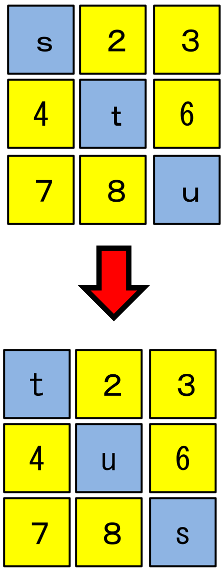


図 12　３×３のパズルにおける置換

９　置換の考えを用いた証明

次の命題を置換の考えを用いて証明する。

> 命題
> m×n のトーラスパズルにおいて、m もしくは n が偶数であるならば、完成できない盤面は存在しないが、m と n がともに奇数であるならば、完成できない盤面が存在する。

まず、トーラスパズルにおける偶置換について考える。

m×n のトーラスパズルにおいて

置換B_1 (1, 2, 3, …, n) は、

上から 1 列目を左にスライド

置換B_2 (1, n+1, 2n+1, …, (m−1) n+1) は、

左から 1 列目を上にスライド

置換B_3 (n, n−1, n−2, …, 1) は、

上から 1 列目を右にスライド

置換B_4 ((m−1) n+1, (m−2) n+1, (m−3) n+1, …, 1) は、左から 1 列目を下にスライドを表す。

この結果、(1, 2, n+1) = $B_1B_2B_3B_4$

が成り立つ。この具体的を**図 13** で示す。

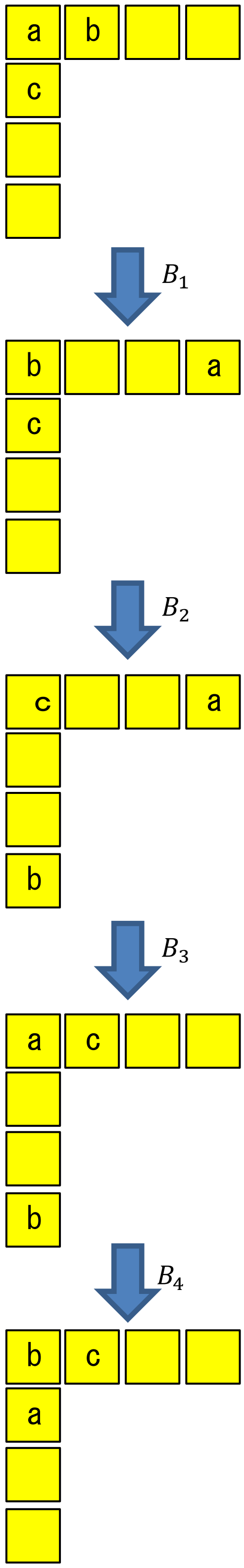


図 13　(1, 2, n+1) = $B_1B_2B_3B_4$の具体例

ここで任意の位置 p, q, r にあるピースをそれぞれ位置 1, 2, n+1 に動かすスライドを表す置換をU､その逆のスライドを表す置換をU^{-1}とすると

U(1, 2, n+1) U^{-1}=(p, q, r) が成り立つ。

その具体例を**図 14** に示す。

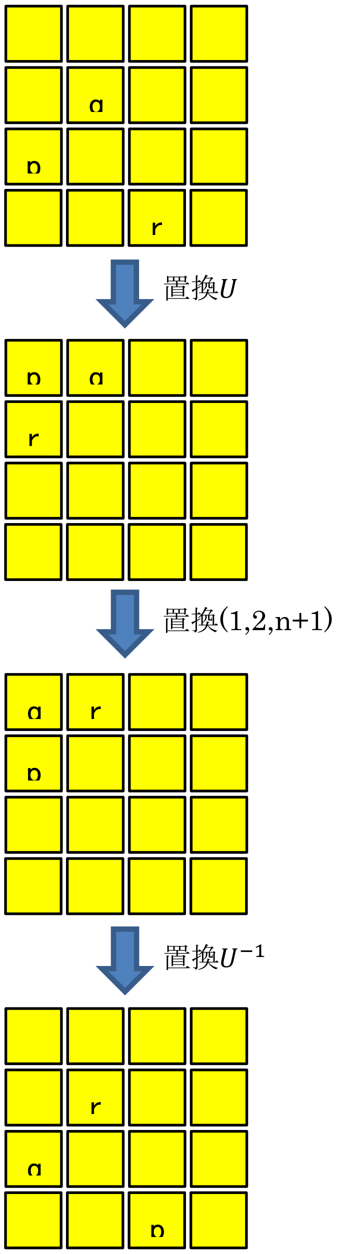


図 14　U(1, 2, n+1) U^{-1}=(p, q, r)の例

左辺の置換は全てスライドによって表すことができるので、任意の位置 p, q, r に対して置換(p, q, r,)で表せられるスライドを行うことができる。

また、任意の 2 互換の積(i, j)(k, l)について

(i, j, k)(j, k, l)=(i, j)(j, k)(j, k)(k, l)

　　= (i, j)(k, l)

が成り立つ。

置換(i, j, k), (j, k, l)はどちらもスライドによって表すことができるので 2 互換の積(i, j)(k, l)で表せられるスライドも行うことができる

偶置換は 2 互換の積の積に分解することができるので、これらのことからトーラスパズルでは全ての偶置換をスライドで表すことができる

続いて、トーラスパズルにおける奇置換について考える。

偶置換と偶置換の積は偶置換であるので、偶置換しか行うことができない場合、奇置換を行うことができない。

U, Vを任意の奇置換とし、Uの逆の置換をU^{-1}とすると

$$V = V \cdot U^{-1} \cdot U$$

が成り立つ

このとき、$V \cdot U^{-1}$は奇置換の積であるため偶置換であり、トーラスパズルでは全ての偶置換をスライドで表すことができる。このことから、任意の奇置換 U で表せられるスライドを行うことができれば、どのような奇置換 V で表せられるスライドも行うことができる、ということができる。

ここで、1 回のスライドの偶奇について考える。n 個の要素の巡回置換の長さは n-1

である。よって、1 列のピースの個数が奇数個のとき、1 回のスライドは偶置換、1 列のピースの個数が偶数個のとき、1 回のスライドは奇置換となる。

つまり、m と n がともに奇数ならば、偶置換しか行うことができない。

m または n が偶数ならば、奇置換も偶置換も行うことができる。

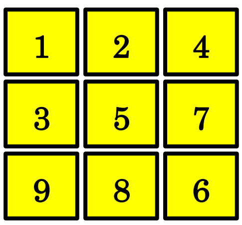
10　判別方法

m と n がともに奇数の場合、完成形から奇置換で表せられる並び替えを行った盤面は完成させることができない。ある盤面が完成形から行われた並び替えが奇置換か偶置換かを判別するための 2 種類の方法を挙げる。

(1)　転倒数

トーラスパズルにおける転倒数とは、トーラスパズルの任意の位置 k(1≦k≦mn)にある数字 p について位置 l(l>k)にある p より小さい数字の個数の総和である。

転倒数が奇数のとき、完成形から奇数回の入れ替えが行われた盤面であり、完成することはできない。転倒数が偶数のとき、完成形から偶数回の入れ替えが行われた盤面であり、完成することができる。



124357986

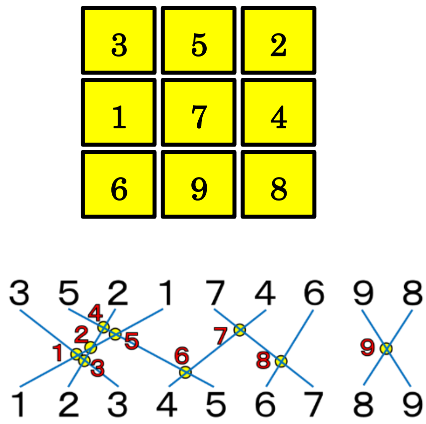
001001210　転倒数　5

図 15　転倒数の例

(2)　交差線図法

トーラスパズルの各ピースの数字を左上から右下の順番で 1 列に並べ、その下に 1~m×n までの数字を昇順に並べる。そして、同じ数字同士を直線で結び、その交点を調べる。

その交点の数が奇数のとき、完成形から奇数回の入れ替えが行われた盤面であり、完成できない。交点の数が偶数のとき、完成形から偶数回の入れ替えが行われた盤面であり、必ず完成することができる。



交点　9

奇数となり完成することができない

図 16　交差線図法の例

11　まとめ

以上のことから、m×n のトーラスパズルにおいて、m と n がともに奇数ならば、完成形から偶置換で表せられる並び替えを行った盤面は完成することができるが、完成形から奇置換で表せられる並び替えを行った盤面を完成させることができない。

m または n が偶数ならば、どのような配置からでも完成できるということがいえる。

12　ルールの変更

奇数×奇数のトーラスパズルでは奇置換で表される操作をスライドによって行うことができないため、完成させることができない盤面がある。そこで、ルールを変更して奇置換で表される操作を行うことができるようにすれば、どのような盤面のトーラスパズルでも必ず完成させることができるようになる。

同じ数字のピースが 2 つ以上あるトーラスパズルについて考える。本来のトーラスパズルの一番大きい数字を 1 に変え、右図のように左上から右下に昇順に並んだ配置を完成形とする。

1	1	2
3	4	5
6	7	8

図 17　ルール変更後のパズルの例

完成形から偶置換で表される並び替えを行った配置は、当然必ず完成できる。

ある奇置換をVとして位置 a,b に同じ数字があるとすると、

$$V=(a,b)\,V$$

が成り立つ。

Vは奇置換より$(a,b)\,V$は偶置換である。つまりすべての奇置換で表される並び替えを偶置換で表すことができるようになる。

すべての偶置換はトーラスパズルのスライドによって表すことができるため、すべての奇置換もトーラスパズルのスライドによって表すことができる。

13　今後の展望

(1)　トーラスパズルを長方形以外の形や立体などに拡張する。

(2)　上記以外のトーラスパズルをどのような m,n に対しても必ず完成することができるような新しいルールを考察する。

(3)　トーラスパズルのある m,n に対して、すべての盤面をその手数以下で完成させることができるような最短手数の上界を求める。

14　参考文献

１）　David Joyner (2010)「群論の味わい 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル」共立出版

2)　愛媛県立松山南高等学校数学班 (2006)「15 パズルの謎」